Correction du Contrôle 4
Dérivation

Solution de l'exercice 1.

1. Les coefficients de la fonction f sont $a = -\frac{1}{4}$, $b = 2$ et $c = 1$. Or $a = \frac{-1}{4} < 0$ donc la parabole est orientée vers le bas.
2. L'abscisse x_S du sommet de la parabole est donné d'après le cours par $x_S = \frac{-b}{2a}$. Donc d'après les valeurs des coefficients données à la question précédente,
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times \frac{-1}{4}} = \frac{-2}{\frac{-1}{2}} = 4.$$
3. La coordonnée y_S est l'image de x_S par f donc
$$y_S = f(x_S) = f(4) = -\frac{4^2}{4} + 2 \times 4 + 1 = -4 + 8 + 1 = 5.$$
4. Grâce aux questions précédentes, on en déduit le tableau de variation de f :

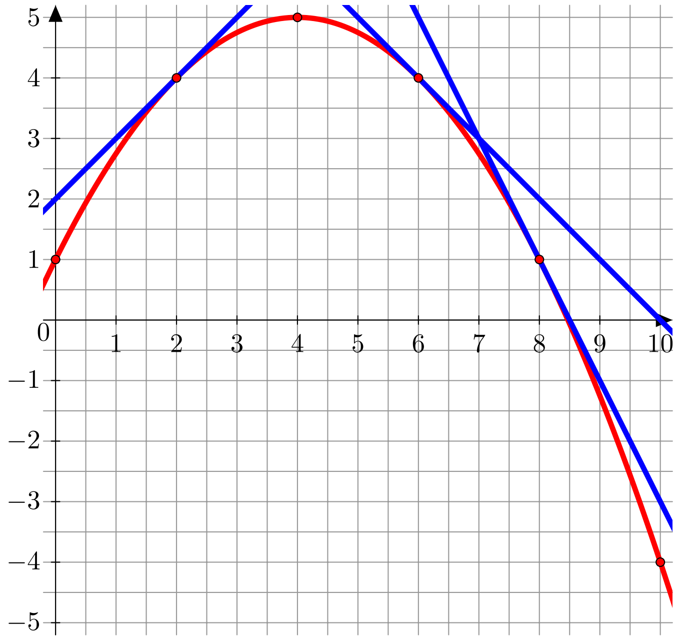
x	$-\infty$		4		$+\infty$
f			5		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

5. Pour compléter le tableau, il suffit de calculer les différentes images,
$$\begin{aligned}
f(0) &= -\frac{0^2}{4} + 2 \times 0 + 1 = 1,\\
f(2) &= -\frac{2^2}{4} + 2 \times 2 + 1 = -\frac{4}{4} + 4 + 1 = 4,\\
f(4) &= 5 \qquad \text{(voir la question 3)},\\
f(6) &= -\frac{6^2}{4} + 2 \times 6 + 1 = -\frac{36}{4} + 12 + 1 = -9 + 13 = 4,\\
f(8) &= -\frac{8^2}{4} + 2 \times 8 + 1 = -\frac{64}{4} + 16 + 1 = -16 + 17 = 1,\\
f(10) &= -\frac{10^2}{4} + 2 \times 10 + 1 = -\frac{100}{4} + 20 + 1 = -25 + 21 = -4,
\end{aligned}$$

x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	**1**	**4**	**5**	**4**	**1**	**-4**

6. En reportant ces valeurs dans le graphique, on en déduit la courbe représentative de f (voir page suivante).

7. La dérivée de la fonction f est donnée pour tout réel x, par
$$f'(x) = 2ax + b = 2 \times \frac{-1}{4}x + 2 = -\frac{x}{2} + 2.$$
8. Donc
$$\begin{aligned} f'(2) &= -\frac{2}{2} + 2 = -1 + 2 = 1, \\ f'(6) &= -\frac{6}{2} + 2 = -3 + 2 = -1, \\ f'(8) &= -\frac{8}{2} + 2 = -4 + 2 = -2. \end{aligned}$$
9. Voici le tracé que l'on devait obtenir pour répondre aux questions 5 et 8 :



Solution de l'exercice 2.

1. Le coût pour 1000 objets et 1001 objets sont donnés par
$$\begin{aligned} c(1000) &= 2000 + 100 \times 1000 - 0,01 \times 1000^2 = 92000\,€, \\ c(1001) &= 2000 + 100 \times 1001 - 0,01 \times 1001^2 = 92079,99\,€. \end{aligned}$$
2. L'augmentation correspond donc simplement à l'augmentation entre ces deux coûts :
$$c(1001) - c(1000) = 92079,99 - 92000 = 79,99\,€.$$
3. Le coût de $x+1$ objets est calculer en remplaçant x par $x+1$ dans la formule du coût $c(x)$:
$$c(x+1) = 2000 + 100(x+1) - 0,01(x+1)^2.$$
On développe cette formule (notamment à l'aide de l'identité remarquable $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$) :
$$\begin{aligned} c(x+1) &= 2000 + 100x + 100 - 0,01(x^2 + 2x + 1) \\ &= 2100 + 100x - 0,01x^2 - 0,01 \times 2x - 0,01 \\ &= 2099,99 + 100x - 0,01x^2 - 0,02x \\ &= 2099,99 + 99,98x - 0,01x^2 \end{aligned}$$

4. Le coût marginal vaut donc

$$\begin{aligned} CM(x) = c(x+1) - c(x) &= 2099,99 + 99,98x - 0,01x^2 - \left(2000 + 100x - 0,01x^2\right) \\ &= 2099,99 + 99,98x - 0,01x^2 - 2000 - 100x + 0,01x^2 \\ &= 99,99 - 0,02x. \end{aligned}$$

5. Le coût marginal du millième objet est donc de

$$CM(1000) = 99,99 - 0,02 \times 1000 = 99,99 - 20 = 79,99\,€,$$

ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question 2.

6. Les coefficients de la fonction du second degré $c(x)$ sont $a = -0,01$, $b = 100$ et $c = 2000$. Donc la dérivée de c est donnée par

$$c'(x) = 2ax + b = 2 \times (-0,01)x + 100 = -0,02x + 100.$$

7. Donc en l'évaluant au point $x = 1000$, on obtient

$$c'(1000) = -0,02 \times 1000 + 100 = -20 + 100 = 80.$$

8. Par définition $e(x) = c'(x) - CM(x)$. En remplaçant les formules trouvées précédemment pour c' et CM, on en déduit que

$$e(x) = -0,02x + 100 - (99,99 - 0,02x) = -0,02x + 100 - 99,99 + 0,02x = 0,01\,€.$$

9. Pour $x = 1000$, nous avions $c'(1000) = 80$ et $CM(1000) = 79,99$. La différence est bien de

$$e(1000) = 80 - 79,99 = 0,01\,€.$$